Zur Stabilität eines Plasmas

Von K. HAIN, R. LÜST und A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **12 a**, 833—841 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

Die Stabilität von hydrodynamischen Gleichgewichtskonfigurationen wird mit Hilfe der Methode der kleinen Störungen untersucht. Es wird gezeigt, daß das Stabilitätsverhalten durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung in der Zeit bestimmt ist, wenn man die Viskosität, den elektrischen Widerstand und die thermische Leitfähigkeit vernachlässigt. Da die Differentialgleichung selbstadjungiert ist, können einige allgemeine Theoreme abgeleitet werden, welche für alle Gleichgewichtskonfigurationen gelten. Man kann zeigen, daß der zeitliche Anstieg von Störungen unter gewissen Bedingungen beschränkt ist. Weiterhin können einige hinreichende Bedingungen für die Stabilität angegeben werden. Für den Spezialfall, daß innerhalb eines Plasmazylinders das Magnetfeld verschwindet, werden die Differentialgleichungen explizit gelöst und Bedingungen für die Stabilität abgeleitet. Schließlich wird auch gezeigt, daß die Differentialgleichung auch selbstadjungiert ist, wenn der Druck nicht isotrop ist.

It is shown that the stability of hydromagnetic equilibrium as studied by the method of small perturbations is controlled by one differential equation of second order in time, if one neglects viscosity, electrical resistivity and thermal conductivity. Since the differential equation is self-adjoint some general theorems can be derived which hold for all configurations of hydromagnetic equilibrium. It is possible to show that the rates of growing are limited under certain conditions. Also some sufficient conditions of stability can be given. For a plasma cylinder, inside of which the magnetic field vanishes, the differential equations are solved explicitly and conditions for stability are given. Finally it is shown that the differential equation is also self-adjoint if the pressure is not isotropic.

1. Grundgleichungen

Wenn ein Plasma genügend hohe Leitfähigkeit besitzt, können durch Magnetfelder Kräfte darauf ausgeübt werden, so daß man es vollständig einschließen und damit eine Berührung des Plasmas mit materiellen Wänden verhindern kann. Dazu müssen die aus den MAXWELLschen Spannungen folgenden Kräfte (von denen praktisch allein der magnetische Teil von Wichtigkeit ist) dem Gasdruck das Gleichgewicht halten. Damit dieses Gleichgewicht über endliche Zeit realisierbar ist, muß es stabil gegen kleine Störungen sein.

Um dieses Stabilitätsproblem angreifen zu können, müssen eine Reihe von Vereinfachungen gemacht werden. Wir beschreiben daher das Plasma als eine Flüssigkeit, deren Zustand durch die Angabe ihrer hydrodynamischen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, ihrer Dichte ϱ und ihres Druckes p beschrieben wird, und auf die ein Magnetfeld $\mathfrak{B}$ wirkt, wenn im Plasma elektrische Ströme fließen, d. h, wenn $\operatorname{rot} \mathfrak{B} \neq 0$. Diese Ströme sollen dem OHMschen Gesetz in der Form genügen, die für bewegte Leiter gilt. Diese Näherung, in der wir von der individuellen Beschreibung des Schicksals der einzelnen geladenen Teilchen, oder auch nur von einer getrennten Beschreibung der positiv oder der negativ geladenen Komponente absehen, heißt die hydromagnetische Näherung.

Weiter wollen wir von allen energieverzehrenden Effekten absehen. Wir vernachlässigen daher Viskosität, Wärmeleitfähigkeit und elektrischen Widerstand. Die letztgenannte Annahme ist gerechtfertigt, da wir sehr große freie Weglängen (d. h. sehr hohe Temperaturen) annehmen wollen. Dann ist aber die Viskosität und Wärmeleitfähigkeit nicht verschwindend klein, sondern entlang den Feldlinien sogar sehr groß, so daß es sogar gerechtfertigt wäre, sie in dieser Richtung unendlich zu setzen – d. h. wir könnten $(\mathfrak{B}(\mathfrak{B} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v}) = 0$ und $\mathfrak{B} \operatorname{grad} T = 0$ auch während einer Störung verlangen ($T =$ Temperatur). Wir haben nur wegen der dadurch auftretenden mathematischen Komplikation hierauf verzichtet. Für die elektrische Leitfähigkeit führt die Anisotropie der elementaren Transportprozesse zum Auftreten eines „HALL"-Termes im OHMschen Gesetz, von dem wir aber annehmen dürfen, daß er durch spontan entstehende Raumladungen automatisch kompensiert wird. Dies ist nur dann nicht berechtigt, wenn Störungen mit einer Frequenz vergleichbar der Umlauffrequenz der Ionen in dem vorhandenen Magnetfeld auftreten.

Wenn wir nun weiter den Verschiebungsstrom vernachlässigen und zunächst den Druck als isotrop voraussetzen, erhalten wir das Gleichungssystem (s. hierzu z. B. SCHLÜTER [1]):

[1] A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **5 a**, 72 [1950].

a) *Bewegungsgleichung*

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{B}], \tag{1}$$

b) *Kontinuitätsgleichung* $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\varrho\, \mathfrak{v}), \tag{2}$$

c) *Energiegleichung* $$\frac{dp}{dt} = \gamma \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt}, \tag{3}$$

d) *Induktionsgesetz* $$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}], \tag{4}$$

e) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{5}$$

γ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen.

Im stationären Fall erhält man aus der obigen Gleichung die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{grad} p = -\frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] \tag{6}$$

mit $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Im folgenden sollen solche Magnetfelder, die die Gleichgewichtsbedingung erfüllen, für die also als Folge von Gl. (6)

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] = 0, \tag{7}$$

betrachtet und ihre Stabilität untersucht werden. Für eine Reihe von Spezialfällen liegen schon Stabilitätsuntersuchungen vor [2, 3, 4].

2. Ableitung des Stabilitätskriteriums

Die Stabilität der Gleichgewichtslage soll in der Weise untersucht werden, daß der Gleichgewichtslösung eine kleine Störung überlagert wird, von der festzustellen ist, ob sie mit der Zeit zunehmen kann oder nicht. Die ungestörten Größen seien im folgengen mit dem Index „Null" bezeichnet und es sei angenommen, daß die gestörten Größen klein seien gegen die ungestörten. Insbesondere sei auch die Geschwindigkeitsamplitude klein. Dann bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}_0, \operatorname{rot} \mathfrak{B}], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\varrho_0\, \mathfrak{v}), \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathfrak{v} \operatorname{grad} p_0) + \gamma \frac{p_0}{\varrho_0} \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varrho_0) \right\}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}_0]. \tag{11}$$

Die Quellenfreiheit $\operatorname{div} \mathfrak{B}$ ist durch Gl. (11) gewährleistet, sofern wir nur mit einer Störung in $\mathfrak{B}$ beginnen, für die $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ gilt. Differenzieren wir Gl. (8) nach der Zeit und benützen Gl. (11), so erhält man

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}_0], \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0\right] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\mathfrak{B}_0, \operatorname{rot} \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}_0]\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Die zeitliche Änderung des Drucks soll nun noch durch die ungestörten Größen ausgedrückt werden. Aus Gl. (10) und Gl. (9) bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p &= -(\mathfrak{v} \operatorname{grad} p_0) \\ &\quad + \gamma \frac{p_0}{\varrho_0} \{-\operatorname{div}(\varrho_0\, \mathfrak{v}) + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varrho_0)\} \\ &= -(\mathfrak{v} \operatorname{grad} p_0) - \gamma\, p_0 \operatorname{div} \mathfrak{v} \\ &= -\operatorname{div}(p_0\, \mathfrak{v}) + (1-\gamma)\, p_0 \operatorname{div} \mathfrak{v}. \end{aligned} \tag{13}$$

Damit wird schließlich aus Gl. (12)

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} &= \operatorname{grad} \operatorname{div}(p_0\, \mathfrak{v}) + (\gamma - 1) \operatorname{grad}(p_0 \operatorname{div} \mathfrak{v}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}_0], \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0\right] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\mathfrak{B}_0, \operatorname{rot} \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}_0]\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

In dieser Gleichung tritt bemerkenswerterweise neben den ungestörten Größen, ihren räumlichen Ableitungen und den räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeit nur die zweite Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit auf. Für $\mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t)$ machen wir nun den Ansatz

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{v}(\mathfrak{r})\, e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Das ergibt dann in Gl. (14), wobei wir den Index „Null" im folgenden wieder weglassen werden, falls es ohne Mißverständnisse möglich ist,

$$\begin{aligned} -\omega^2 \varrho\, \mathfrak{v} &= \operatorname{grad} \operatorname{div}(p\, \mathfrak{v}) + (\gamma - 1) \operatorname{grad}(p \operatorname{div} \mathfrak{v}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}], \operatorname{rot} \mathfrak{B}\right] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\mathfrak{B} \operatorname{rot} \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\, \mathfrak{B}]\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Das Magnetfeld, das die Gleichgewichtsbedingung erfüllt, wird also dann stabil sein, wenn die Gl. (16) keine Lösung gestattet, für die ω^2 negativ ist. Denn Lösungen mit $\omega^2 < 0$ würden nach Gl. (15) bedeuten, daß $\mathfrak{v}$ exponentiell mit der Zeit ansteigen könnte.

[2] M. D. Kruskal u. M. Schwarzschild, Proc. Roy. Soc., Lond. A **223**, 348 [1954].

[3] S. Lundquist, Phys. Rev. **83**, 307 [1951].

[4] R. J. Tayler, Proc. Roy. Soc., Lond. B **70**, 31 [1957].

3. Verschiedene Formen der Stabilitätsgleichung

Im folgenden sollen noch einige Umformungen der Stabilitätsgleichungen angegeben werden, wobei zum Teil von der Komponentendarstellung und zum Teil von der Vektordarstellung Gebrauch gemacht wird. Insbesondere soll gezeigt werden, daß der in Gl. (16) auf $\mathfrak{v}$ wirkende Differentialoperator hermitisch ist.

a) Die Stabilitätsgleichung (16) läßt sich unter Einführung eines Tensors $Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}$ wie folgt in Komponenten schreiben (wobei im folgenden stets über zweimal auftretende Indizes zu summieren ist):

$$-\omega^2 \varrho\, v_\alpha = \partial_{\mathrm{l}} Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}\, \partial_{\mathrm{m}} v^\beta . \tag{17}$$

Hierin ist ∂_{l} der kovariante Differentiationsoperator und $Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta} = &\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right) \delta^{\mathrm{l}}_{\beta}\, \delta^{\mathrm{m}}_{\alpha} + \left((\gamma-1)\, p + \frac{B^2}{8\pi}\right) \delta^{\mathrm{l}}_{\alpha}\, \delta^{\mathrm{m}}_{\beta} \\ &- \frac{1}{4\pi} \left(B^{\mathrm{l}} B_\alpha\, \delta^{\mathrm{m}}_{\beta} + B_\beta B^{\mathrm{m}}\, \delta^{\mathrm{l}}_{\alpha}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi} B^{\mathrm{m}} B^{\mathrm{l}} g_{\alpha\beta} . \end{aligned} \tag{18}$$

Obere Indizes bedeuten kontravariante, untere Indizes kovariante Komponenten und $g_{\alpha\beta}$ ist der metrische Fundamentaltensor. Der auf v^β wirkende Operator ist nun hermitesch, wenn für zwei beliebige Vektoren v^α und w^α

$$\int \sqrt{g}\, \mathrm{d}\tau\, w^\alpha \partial_{\mathrm{l}} Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}\, \partial_{\mathrm{m}} v^\beta = \int \sqrt{g}\, \mathrm{d}\tau\, v^\alpha \partial_{\mathrm{l}} Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}\, \partial_{\mathrm{m}} w^\beta \tag{19}$$

ist. (Die Integration soll sich über ein Volumen erstrecken mit $\sqrt{g}\, \mathrm{d}\tau$ als Volumenelement.) Nun läßt sich die rechte Seite durch partielle Integration umformen zu

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{g}\, \mathrm{d}\tau\, \partial_{\mathrm{l}} \left\{ v^\alpha Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}\, \partial_{\mathrm{m}} w^\beta \right\} \\ &\quad - \int \sqrt{g}\, \mathrm{d}\tau\, \partial_{\mathrm{m}} \left\{ w^\beta Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}\, \partial_{\mathrm{l}} v^\alpha \right\} \\ &\quad + \int \sqrt{g}\, \mathrm{d}\tau\, w^\beta \partial_{\mathrm{m}} Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}\, \partial_{\mathrm{l}} v^\alpha . \end{aligned}$$

Wenn wir nun annehmen, daß die beiden sich ergebenden Oberflächenintegrale verschwinden, sieht man, daß die Gl. (19) gilt, falls

$$Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta} = Q^{\mathrm{ml}}_{\beta\alpha} \tag{20}$$

ist. Der Tensor muß also invariant sein gegen eine Vertauschung des Paares l, α mit m, β, damit der Differentialoperator hermitesch ist. Aus Gl. (18) sieht man leicht, daß dies in der Tat der Fall ist. Aus der Hermitizität folgt, daß ω^2 reell sein muß. Somit können überstabile Lösungen (d. h. oszillatorische Lösungen mit ansteigender Amplitude) nicht existieren.

b) Im weiteren soll nun so vorgegangen werden, daß die Differentialgleichung (16) für $\mathfrak{v}$ – analog wie in Gl. (19) – skalar mit $\mathfrak{v}$ multipliziert wird und dann über ein Volumen integriert wird. Das auf der linken Seite stehende Integral ist stets positiv, so daß also das Vorzeichen von ω^2 von den Vorzeichen der auf der rechten Seite stehenden Integralen abhängen wird. Wenn die rechte Seite negativ ist, so ist die Gleichgewichtskonfiguration stabil, im anderen Fall instabil. Da das Integral $\varrho\, \mathfrak{v}^2\, \mathrm{d}\tau$ beschränkt ist, während sich für die Ableitungen von $\mathfrak{v}$ keine Abschätzung angeben läßt, wird das Bestreben sein, die rechte Seite so umzuformen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nicht differenziert auftritt in solchen Gliedern, die nicht negativ definit (d. h. instabil) sind.

Bei skalarer Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ liefert das letzte Glied in Gl. (16) einen stabilen Beitrag, da

$$\big(\mathfrak{v}\,[\mathfrak{B}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big) = (\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}], [\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]) = \operatorname{div}\big[\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}], [\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\big] + (\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])^2 . \tag{21}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\operatorname{div} p\,\mathfrak{v}) + (\gamma-1)\big(\mathfrak{v}\operatorname{grad}(p\operatorname{div}\mathfrak{v})\big) \\ &\qquad = \operatorname{div}\{\gamma\,\mathfrak{v}\,p\operatorname{div}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\operatorname{grad} p)\} - \gamma\,p(\operatorname{div}\mathfrak{v})^2 - (\mathfrak{v}\operatorname{grad} p)\operatorname{div}\mathfrak{v} . \end{aligned} \tag{22}$$

Damit bekommt man

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int \varrho\,\mathfrak{v}^2\,\mathrm{d}\tau = &\int \operatorname{div}\left\{\gamma\,\mathfrak{v}\,p\operatorname{div}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\operatorname{grad} p) + \frac{1}{4\pi}\big[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}], \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\big]\right\} \mathrm{d}\tau \\ &- \int \left\{\gamma\,p(\operatorname{div}\mathfrak{v})^2 + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])^2\right\} \mathrm{d}\tau \\ &- \int \left\{(\mathfrak{v}\operatorname{grad} p)\operatorname{div}\mathfrak{v} - \frac{1}{4\pi}\big(\mathfrak{v}\,[\operatorname{rot}\mathfrak{B}, \operatorname{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big)\right\} \mathrm{d}\tau . \end{aligned} \tag{23}$$

Hierin liefert also das zweite Glied stets einen stabilen Beitrag. Für das folgende wollen wir stets annehmen, daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{B}$ parallel zur Oberfläche des betrachteten Volumens verlaufen, so daß das erste Oberflächenintegral keinen Beitrag liefert.

c) Aus Gl. (17) zusammen mit Gl. (18) bekommt man durch Multiplikation mit v^α noch einen anderen Ausdruck, der für die weiteren Stabilitätsuntersuchungen nützlich ist.

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 \int \sqrt{g}\, d\tau\, \varrho\, v^\alpha v_\alpha &= \int \sqrt{g}\, d\tau\, v^\alpha\, \partial_l\, Q^{lm}_{\alpha\beta}\, \partial_m v^\beta \\
&= \int \sqrt{g}\, d\tau\, \partial_\alpha \left\{ \left((\gamma-1)\, p + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) v^\alpha\, \partial_\beta v^\beta + \frac{1}{4\pi} B^\alpha B^\gamma v_\beta\, \partial_\gamma v^\beta - \frac{1}{4\pi} \left(B^\alpha B^\beta v_\beta\, \partial_\gamma v^\gamma + B_\beta B^\gamma v^\alpha\, \partial_\gamma v^\beta \right) \right\} \\
&\quad - \int \sqrt{g}\, d\tau \left\{ \left((\gamma-1)\, p + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) (\partial_\gamma v^\gamma)^2 + (B^\beta\, \partial_\beta v^\alpha)(B^\gamma\, \partial_\gamma v_\alpha) \right\} \qquad (24) \\
&\quad - \int \sqrt{g}\, d\tau \left\{ \psi (\partial_\beta v^\alpha)(\partial_\alpha v^\beta) - 2 B^\alpha B^\beta (\partial_\beta v_\alpha)(\partial_\gamma v^\gamma) \right\} + \int \sqrt{g}\, d\tau\, \partial_\alpha (\psi\, v^\beta\, \partial_\beta v^\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Hierin ist ψ der Gesamtdruck mit

$$\psi = p + \frac{1}{8\pi} B^2\,. \qquad (25)$$

Das sich aus dem ersten Volumenintegral ergebende Oberflächenintegral verschwindet analog wie oben.

4. Ableitung eines Stabilitätskriteriums

a) Zunächst sei gezeigt, daß $-\omega^2$ unter gewissen Bedingungen nach oben beschränkt ist. Es ist

$$-(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} = +\frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)^2 + \frac{1}{2}\,p\,(\mathrm{div}\,\mathfrak{v})^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,\{\mathrm{div}\,p\,\mathfrak{v}\}^2$$

und

$$(\mathrm{rot}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]) = +\frac{1}{2}\,(\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])^2 + \frac{1}{2}\,[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]^2 - \frac{1}{2}\,(\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}])^2\,.$$

Damit erhält man:

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 \int \varrho\, \mathfrak{v}^2\, d\tau = -\frac{1}{2} \int \Big\{ (2\gamma-1)\, p\, (\mathrm{div}\,\mathfrak{v})^2 + \frac{1}{p}\,(\mathrm{div}\,p\,\mathfrak{v})^2 + \frac{1}{4\pi}\,[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]^2 \qquad (26) \\
+ (\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}])^2 \Big\}\, d\tau + \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{p}\,(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)^2 + [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]^2 \right\} d\tau\,.
\end{aligned}
$$

Das erste Integral liefert nun stets einen negativen Beitrag, während das andere Integral immer positiv ist. Jedoch tritt in diesem zweiten Glied $\mathfrak{v}$ nicht mehr differenziert auf. Man gewinnt so die Abschätzung:

$$-\omega^2 \int \varrho\, \mathfrak{v}^2\, d\tau < \mathrm{Max} \left\{ \frac{1}{\varrho\, p}\,(\mathrm{grad}\,p)^2 + \frac{1}{\varrho}\,(\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})^2 \right\} \int \varrho\, \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

und somit

$$-\omega^2 < \mathrm{Max} \left\{ \frac{1}{\varrho\, p}\,(\mathrm{grad}\,p)^2 + \frac{1}{\varrho}\,(\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})^2 \right\}.$$

Sofern also $(1/\sqrt{\varrho\, p})\,|\mathrm{grad}\,p|$ und $(1/\sqrt{\varrho})\,|\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}|$ endlich bleibt, ist $-\omega^2$ nach oben beschränkt, d. h. im Falle der Instabilität können dann die zeitlichen Wachstumsraten nicht beliebig groß werden.

b) Der Ausdruck Gl. (23) soll nun so umgeformt werden, daß es möglich wird, etwas über die Stabilität von Gleichgewichtskonfigurationen auszusagen. Dazu sollen die beiden instabilen Glieder in eine andere Form gebracht werden.

Es ist

$$
\begin{aligned}
-(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} &= -(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{div}\left\{ \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left([\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]] + \mathfrak{B}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}) \right) \right\} \\
&= -(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\,\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]] - \mathrm{div}\left\{ \frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2}\,(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p) \right\} \qquad (27) \\
&\quad - \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2} \left(\mathfrak{B}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p) \right) - (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p) \left([\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mathfrak{B}^2} \right).
\end{aligned}
$$

Weiter ist unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung Gl. (6)

$$\frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]) = \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\Big(\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,\big[\mathfrak{v}[\mathfrak{B}\,\mathrm{grad}\,p]\big]\Big) + \frac{1}{4\pi}\frac{(\mathfrak{B},\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2}(\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])$$

$$= \frac{(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{B},\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]) - \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2}(\mathrm{grad}\,p,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]) + \frac{1}{4\pi}\frac{(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2}([\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}],\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])$$

$$= \frac{(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)}{\mathfrak{B}^2}\big\{\mathrm{div}\,\big[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{B}\big] + ([\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})\big\} - \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2}\,\mathrm{div}\,\big\{\mathfrak{B}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\big\} + \frac{1}{4\pi}\frac{(\mathfrak{B},\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2}([\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}],\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])$$

$$= -\frac{1}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{div}\,\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\big] - \frac{4\pi}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)^2 - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{B})\big(\mathfrak{B},\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\big)$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})([\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}],\mathrm{rot}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]). \tag{28}$$

Außerdem läßt sich das Glied $-\frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])^2$ wie folgt umformen:

$$-\frac{1}{4\pi}\{\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\}^2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^4}\Big\{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]) - \big[\mathfrak{B}[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big]\Big\}^2$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])^2 - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^4}\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big]^2 \tag{29}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\big\{\mathrm{div}\,\big[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{B}\big] - 4\pi(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\big\}^2 - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^4}\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big]^2.$$

Aus Gl. (23) wird unter Benutzung von Gln. (27), (28) und (29)

$$-\omega^2\int\varrho\,\mathfrak{v}^2\,d\tau = \int d\tau\,\Big\{-\gamma\,p(\mathrm{div}\,\mathfrak{v})^2 - \frac{1}{4\pi\,\mathfrak{B}^4}\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big]^2$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\big(\mathrm{div}\,\big[[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{B}\big]\big)^2 - \frac{4}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\,\mathrm{div}\,\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\big] - \frac{8\pi}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)^2 \tag{30}$$

$$-(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\Big(\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\big]\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\Big) + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})([\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}],\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}])\Big\}.$$

Dabei verschwindet das Oberflächenintegral, das aus Gl. (27) folgt, wenn $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{B}$ parallel zur Oberfläche sind. Gl. (30) läßt sich schreiben zu

$$-\omega^2\int\varrho\,\mathfrak{v}^2\,d\tau = \int d\tau\,\Big\{-\gamma\,p(\mathrm{div}\,\mathfrak{v})^2 - \frac{1}{8\pi\,\mathfrak{B}^2}[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]^2 - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\big\{\mathrm{div}\,\big[\mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\big] + 8\pi(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)\big\}^2$$

$$-\frac{1}{8\pi}\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\big\{\mathfrak{v}(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}) - [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]]\big\}^2\Big\}$$

$$+\int d\tau\,\Big\{\frac{8\pi}{\mathfrak{B}^2(\mathrm{grad}\,p)^2}(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)^2\Big((\mathrm{grad}\,p)^2 + \frac{1}{8\pi}(\mathrm{grad}\,p,\mathrm{grad}\,\mathfrak{B}^2)\Big) \tag{31}$$

$$+\frac{(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,p)}{\mathfrak{B}^4(\mathrm{grad}\,p)^2}(\mathfrak{v}[\mathfrak{B},\mathrm{grad}\,p])(\mathrm{grad}\,\mathfrak{B}^2,[\mathfrak{B},\mathrm{grad}\,p]) + \frac{(\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B})^2}{8\pi\,\mathfrak{B}^2}\mathfrak{v}^2\Big\}.$$

Das erste Integral liefert stets einen stabilen Beitrag, während in dem letzten Integral $\mathfrak{v}$ nicht mehr differenziert vorkommt. Stets instabil ist darin das letzte Glied, es verschwindet aber für spezielle Magnetfelder, nämlich immer dann, wenn der Strom auf dem Magnetfeld senkrecht steht. Das ist z. B. der Fall für alle zylindersymmetrischen Felder, die entweder rein meridional oder rein toroidal sind.

Wenn wir nun für das Magnetfeld noch eine solche Struktur annehmen, daß

$$(\mathrm{grad}\,\mathfrak{B}^2,\,[\mathfrak{B},\mathrm{grad}\,p]) = 0 \tag{32}$$

ist, so verschwindet auch das vorletzte Glied. Diese Bedingung ist z. B. bei allen meridionalen zylindersymmetrischen Magnetfeldern erfüllt. In diesem Fall ist es hinreichend für die Stabilität, daß

$$\Big(\mathrm{grad}\,p,\,\mathrm{grad}\Big(p + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2\Big)\Big) \leqq 0 \tag{33 a}$$

ist. Nach Gl. (6) läßt sich dafür auch schreiben

$$\big(\mathrm{grad}\,p,(\mathfrak{B}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{B}\big) \leqq 0\,. \tag{33 b}$$

Eine Konfiguration, bei der der Strom sowohl senkrecht steht auf den magnetischen Feldlinien als auch auf den Flächen konstanter magnetischer Energiedichte, ist demnach ganz sicher stabil, wenn die magnetischen Kraftlinien so gekrümmt sind, daß sie überall konvex zur Seite des größeren Druckes verlaufen.

Dieses Ergebnis wurde auch von BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL und KULSRUD [*, 5] für zylindersymmetrische, meridionale Magnetfelder abgeleitet.

Felder, für die $(\mathfrak{B}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{B} = 0$ (34)

ist, und die den oben genannten Bedingungen genügen, sind also stets stabil. Dies gilt z. B. für ein zylindersymmetrisches Magnetfeld, das parallel zur Symmetrieachse verläuft. In diesem Fall kann man aus der Differentialgleichung (17) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung von STURM-LIOUVILLEschen Typ für $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ ableiten und auch explizit zeigen, daß keine instabilen Lösungen existieren.

c) Aus Gl. (24) soll nun noch ein etwas allgemeineres Stabilitätskriterium abgeleitet werden. Es ergibt sich zunächst aus Gl. (24)

$$-\omega^2 \int \sqrt{g}\,\mathrm{d}\tau\,\varrho\,v_\alpha v^\alpha = -\int \sqrt{g}\,\mathrm{d}\tau\,\Big\{\psi(\partial_\alpha v^\gamma)(\partial_\gamma v^\alpha) - \frac{B^2}{2}(\partial_\gamma v^\gamma)^2 - (\gamma-1)\,p\,(\partial_\gamma v^\gamma)^2 + \{B^\beta\,\partial_\beta v^\alpha - B^\alpha\,\partial_\gamma v^\gamma\}\{B^\beta\,\partial_\beta v_\alpha - B_\alpha\,\partial_\gamma v^\gamma\} - \partial_\alpha(\psi\,v^\beta\,\partial_\beta v^\alpha). \tag{35}$$

Nach zwei partiellen Integrationen und nach Subtraktion der vollständigen Divergenz $\partial_\gamma(\psi\,v^\gamma\,v^\alpha_\alpha)$ erhalten wir, wenn wir das Verschwinden der Oberflächenintegrale gemäß Abschnitt 3 c) annehmen:

$$\begin{aligned}-\omega^2 \int \sqrt{g}\,\mathrm{d}\tau\,\varrho\,v_\alpha v^\alpha &= -\int \sqrt{g}\,\mathrm{d}\tau\,\Big\{\gamma\,p(\partial_\varepsilon v^\varepsilon)^2 + 2(\partial_\gamma\psi)\,v^\gamma\,\partial_\varepsilon v^\varepsilon + (\partial_\alpha\partial_\gamma\psi)\,v^\alpha v^\gamma \\ &\quad + \{B^\beta\,\partial_\beta v^\alpha - B^\alpha\,\partial_\gamma v^\gamma\}\{B^\beta\,\partial_\beta v_\alpha - B_\alpha\,\partial_\gamma v^\gamma\} \\ &= -\int \sqrt{g}\,\mathrm{d}\tau\,\Big\{\Big(\partial_\gamma v^\gamma + \frac{\partial_\gamma\psi\,v^\gamma}{\gamma\,p}\Big)\gamma\,p + \{B_\gamma\,\partial_\gamma v^\alpha - B^\alpha\,\partial_\gamma v^\gamma\} \\ &\quad \cdot\{B^\gamma\,\partial_\gamma v_\alpha - B_\alpha\,\partial_\gamma v^\gamma\} + \Big\{\frac{(\partial_\alpha\psi)\,\partial_\gamma\psi}{\gamma\,p} - \partial_\alpha\partial_\gamma\psi\Big\}\,v^\alpha v^\gamma\Big\}\end{aligned} \tag{36}$$

Die Konfiguration ist sicher stabil, wenn die Eigenwerte des Tensors im letzten Gliede positiv sind, d. h. die Eigenwerte von

$$\Big(\frac{(\partial_\alpha\psi)\,\partial_\gamma\psi}{\gamma\,p} - \partial_\alpha\partial_\gamma\psi\Big).$$

Man kann zeigen, daß alle rotationsfreien Störungen stabil sind. Machen wir nun die Annahme, daß divergenzfreie Lösungen die instabilsten Lösungen sind, so genügt es, als eine hinreichende Bedingung für die Stabilität zu fordern, daß die Eigenwerte von $\partial_\alpha\,\partial_\gamma\,\psi$ nicht negativ sind. Das bedeutet, daß ψ in dem betrachteten Volumen (oder auf dem Rand) genau ein Minimum besitzen kann, Maxima aber nur auf dem Rand. Ein Minimum von ψ im Innern des Volumens (nicht auf dem Rande) ist mit einem Maximum von p (wie dies dem Fall eines vom Magnetfeld zusammengehaltenen Plasmas entspricht) nach der in Abschnitt 4 b) für meridionale Magnetfelder abgeleiteten hinreichenden Stabilitätsbedingung $(\mathrm{grad}\,p,\ \mathrm{grad}\,\psi) < 0$ verträglich.

5. Anisotroper Drucktensor

Bei den bisherigen Betrachtungen war angenommen worden, daß der Druck isotrop sei. Wenn aber die Frequenz der gaskinetischen Stöße, die die geladenen Teilchen erleiden, klein ist verglichen mit ihrer Umlauffrequenz im Magnetfeld, ist dies nicht notwendig eine gute Näherung. In Ebenen senkrecht zum Magnetfeld wird die Geschwindigkeitsverteilung – gerade wegen der schnellen Umlaufsbewegung – isotrop sein, aber in der Richtung entlang den Feldlinien kann sie davon sehr verschieden sein. Damit ergibt sich statt des skalaren Druckes p ein Tensor p_{ik} der Form:

$$p_{ik} = p^{\mathrm{Q}}(\delta_{ik} - n_i\,n_k) + p^{\mathrm{P}}\,n_i\,n_k\,. \tag{37}$$

* Die Arbeit gelangte während der Fertigstellung dieses Manuskriptes zu unserer Kenntnis und wir danken den Verfassern für die Zusendung vor der Veröffentlichung.

5 I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD (noch nicht veröffentlicht).

Hierin ist p^{Q} der Druck quer zum Magnetfeld, p^{P} der Druck entlang den magnetischen Feldlinien und $n_{\mathrm{i}} = \frac{B_{\mathrm{i}}}{|B|}$ der Einheitsvektor in Richtung des Magnetfeldes.

In der Bewegungsgleichung (1) ist nun $\frac{\partial}{\partial x_i} p$ durch $\frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik}$ zu ersetzen. An die Stelle der Energiegleichung (3) treten nun zwei Gleichungen für p^{Q} und p^{P}. Aus der Konstanz des magnetischen Momentes der Bahnbewegung der Teilchen folgen unter Vernachlässigung von Transporteffekten (entsprechend der vernachlässigten Viskosität und Wärmeleitfähigkeit) die Gleichungen *

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} = -2\,p^{\mathrm{P}} \operatorname{div} \mathfrak{v} - 2\,p^{\mathrm{P}}\, \mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v}\,, \tag{38 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}t} = -2\,p^{\mathrm{Q}} \operatorname{div} \mathfrak{v} + p^{\mathrm{Q}}\, \mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v}\,. \tag{38 b}$$

Wir wollen nun annehmen, daß im Gleichgewichtsfall der Druck zwar isotrop sei, d. h. $p^{\mathrm{P}} = p^{\mathrm{Q}} = p_0$, daß aber durch die Störung der Gleichgewichtslage der Druck anisotrop wird. In der noch einmal nach der Zeit differenzierten Bewegungsgleichung (12) tritt dann an Stelle von $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} p$ nun der Term $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{n}}} p_{ik}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{\mathrm{n}}}\left(\frac{\partial}{\partial t} p_{ik}\right)$ auf. Hierin ist in der linearen Näherung und wegen $p^{\mathrm{P}} = p^{\mathrm{Q}} = p_0$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ik} = \frac{\partial p^{\mathrm{Q}}}{\partial t}\,(\delta_{ik} - n_i\, n_k) + \frac{\partial p^{\mathrm{P}}}{\partial t}\, n_i\, n_k \tag{39}$$

und aus den Gln. (38 a) und (38 b) wird, wobei der Index „Null“ bei p_0 im folgenden wieder weggelassen werden soll:

$$\frac{\partial p^{\mathrm{P}}}{\partial t} = -\operatorname{div}(p\,\mathfrak{v}) - 2\,p\left(\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v}\right) \tag{40 a}$$

und

$$\frac{\partial p^{\mathrm{Q}}}{\partial t} = -\operatorname{div}(p\,\mathfrak{v}) + p\left\{\left(\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v}\right) - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right\}. \tag{40 b}$$

Dies liefert zusammen mit Gl. (39)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik}\right) = -\operatorname{grad}_i \operatorname{div} p\,\mathfrak{v} + \operatorname{grad}_i \left\{p\left(\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right)\right\}$$
$$- n_i \operatorname{div}\left\{\mathfrak{n}\, p\left(3\,\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right)\right\} - p\left\{3\,\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right\}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{n}\,\big|_i\,, \tag{41}$$

so daß Gl. (16) jetzt lautet:

$$-\omega^2\, \varrho\, \mathfrak{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div}\ (p\,\mathfrak{v}) - \operatorname{grad}\left\{p\left(\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right)\right\}$$
$$+ \mathfrak{n} \operatorname{div}\left\{\mathfrak{n}\, p\left(3\,\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right)\right\} + p\left\{3\,\mathfrak{n}(\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v}\right\}\ (\mathfrak{n} \operatorname{grad})\, \mathfrak{n}\,. \tag{42}$$

Wie man sieht, treten also auch im Falle des anisotropen Druckes in dieser Gleichung für $\mathfrak{v}$ keine ersten zeitlichen Ableitungen von $\mathfrak{v}$ auf und außerdem enthält die Gleichung neben $\mathfrak{v}$ nur die Größen der Gleichgewichtslage. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch mit den neu hinzugekommenen Gliedern der Operator $Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta}$ hermitesch ist, der hier gegeben ist durch

$$Q^{\mathrm{lm}}_{\alpha\beta} = \left(p + \frac{B^2}{8\,\pi}\right) \delta^{\mathrm{l}}_{\beta}\, \delta^{\mathrm{m}}_{\alpha} + 3\,p\, n_\alpha\, n_\beta\, n^{\mathrm{l}}\, n^{\mathrm{m}} - p\left(n_\alpha\, n^{\mathrm{l}}\, \delta^{\mathrm{m}}_{\beta} + n_\beta\, n^{\mathrm{m}}\, \delta^{\mathrm{l}}_{\alpha}\right)$$
$$+ \frac{B^2}{8\,\pi}\, \delta^{\mathrm{l}}_{\alpha}\, \delta^{\mathrm{m}}_{\beta} - \frac{1}{4\,\pi}\left(B^{\mathrm{l}}\, B_\alpha\, \delta^{\mathrm{m}}_{\beta} + B_\beta\, B^{\mathrm{m}}\, \delta^{\mathrm{l}}_{\alpha}\right) + \frac{1}{4\,\pi}\, B^{\mathrm{m}}\, B^{\mathrm{l}}\, g_{\alpha\beta}\,. \tag{43}$$

6. Stabilität eines mit Oberflächenströmen belegten Plasmazylinders

Wir wollen jetzt die Stabilität eines Plasmazylinders, dessen Radius R sei, untersuchen, in dessen Inneren das Magnetfeld $\mathfrak{B}$ verschwindet und der Druck p konstant ist. Auf der Oberfläche sollen Ströme fließen, die ein Magnetfeld mit Komponenten in der z- und in der φ-Richtung erzeugen.

Da wir unter diesen Voraussetzungen die Differentialgleichung mit den entsprechenden Übergangsbedingungen an der Oberfläche des Zylinders lösen können, ist es möglich, die Eigenwerte direkt abzuschätzen. Als die die Lösung bestimmende Randbedingung sei das Verschwinden der elektrischen und magnetischen Felder im unendlich Fernen gefordert.

Führen wir die Schallgeschwindigkeit a durch die folgende Gl. (44):

* Diese Gleichungen wurden auch von Chew, Goldberger und Low [6] aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet.

[6] O. F. Chew, M. L. Goldberger u. F. E. Low, Proc. Roy. Soc., Lond. A **236**, 112 [1956].

$$a = \sqrt{p/\varrho} \tag{44}$$

ein, so erhalten wir sofort aus Gl. (17)

$$-\frac{\omega^2}{a^2}\, p\, v_\alpha = p\, \partial_\alpha\, \partial_\gamma\, v^\gamma . \tag{45}$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung folgt durch Divergenzbildung die Differentialgleichung für die Druckstörung p_1

$$\Delta p_1 + \frac{\omega^2}{a^2}\, p_1 = 0 \tag{46}$$

mit der Lösung

$$p_1 = \tilde{p}_1\, I_\alpha \left\{ \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\, r \right\} e^{i k z}\, e^{i \alpha \varphi} . \tag{47}$$

Die Lösungen $K_\alpha\{\sqrt{(k^2-\omega^2/a^2)}\, r\}$ sind wegen $p_1 < \infty$ für $r = 0$ ausgeschlossen *. $\tilde{p}_1$ ist eine Integrationskonstante. Die Geschwindigkeiten sind durch den Druck vollständig bestimmt.

Außerhalb des Zylinders haben wir die MAXWELLschen Gleichungen im Vakuum für die gestörten Felder zu lösen. Diese reduzieren sich auf Gleichungen für die z-Komponenten des Magnetfeldes und des elektrischen Feldes, da sich alle Komponenten durch diese ausdrücken lassen.

$$\Delta B_z^{\,1} + \frac{\omega^2}{c^2}\, B_z^{\,1} = 0\,, \tag{48 a}$$

$$\Delta E_z^{\,1} + \frac{\omega^2}{c^2}\, E_z^{\,1} = 0\,. \tag{48 b}$$

Unter Vernachlässigung von ω^2/c^2 gegen $k^2 + \alpha^2/r^2$ erhalten wir die Lösungen

$$B_z^{\,1} = B_z^{\,1}\, K_\alpha(k\, r)\; e^{i k z}\, e^{i \alpha \varphi}\,, \tag{49 a}$$

$$E_z^{\,1} = E_z^{\,1}\, K_\alpha(k\, r)\; e^{i k z}\, e^{i \alpha \varphi}\,. \tag{49 b}$$

Wegen der Forderung $|\mathfrak{B}|, |\mathfrak{E}| < \infty$ für $r \to \infty$ fallen die Lösungen I_α weg.

Die Bestimmung der Konstanten p_1, $B_z^{\,1}$, $E_z^{\,1}$ folgt aus den Übergangsbedingungen am Zylinderrand, die ein homogenes Gleichungssystem liefern. Die Forderung der Lösbarkeit dieses homogenen Gleichungssystems ergibt eine Beziehung zwischen k, α und ω. Die Übergangsbedingungen entnehmen wir KRUSKAL und SCHWARZSCHILD [2]. Sie lauten:

$$\mathfrak{n} \times [\mathfrak{B}] = \mathfrak{j} - \mathfrak{n}[\mathfrak{E}]\,, \tag{50 a}$$

$$\mathfrak{n}[\mathfrak{B}] = 0\,, \tag{50 b}$$

$$\mathfrak{n} \times [\mathfrak{E}] = \mathfrak{n}[\mathfrak{B}]\,, \tag{50 c}$$

$$\mathfrak{n}[\mathfrak{E}] = \varepsilon^+, \tag{50 d}$$

$$\mathfrak{j}^+ = \mathfrak{v}\, \varepsilon^+, \tag{50 e}$$

$$[\mathfrak{j}^+ \times \overline{\mathfrak{B}}] + \varepsilon\, \mathfrak{E} = \mathfrak{n}[p]\,. \tag{50 f}$$

Dabei ist $\mathfrak{n}$ die Normale an der Oberfläche, [ ] bezeichnet den Sprung von Größen durch die Grenzfläche, $\mathfrak{j}^+$ ist der Oberflächenstrom, ε^+ die Oberflächenladung, $\overline{\mathfrak{B}}$ ist der Mittelwert des Magnetfeldes zwischen innen und außen.

Die Bewegung der Oberfläche mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{n}\, \mathfrak{v}\,, \qquad \mathfrak{u} = [\mathfrak{n} \times [\mathfrak{n} \times \operatorname{grad} \mathfrak{u}]]\,.$$

Der ungestörte Oberflächenstrom sei

$$\mathfrak{j}^+ = -\mathfrak{e}_z\, D + \mathfrak{e}_\varphi\, C\,.$$

Daraus ergibt sich der Sprung des Magnetfeldes zu

$$[\mathfrak{B}] = \mathfrak{e}_z\, C + \mathfrak{e}_\varphi\, D$$

und der Drucksprung $[p] = -\tfrac{1}{2}(B^2 + C^2)$.

Setzt man dies in die oben abgeleitete Gleichung ein unter Beachtung der bei KRUSKAL und SCHWARZSCHILD abgeleiteten Beziehung zwischen den Komponenten von $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ und $p, \mathfrak{v}$, so folgt mit

$$\eta^2 = k^2 - \omega^2/a^2, \qquad E_z^{\,1} = -i\, \frac{C\, \tilde{p}_1}{p\, \omega}\, \frac{I_\alpha'(\eta\, R)}{K_\alpha(k\, R)}\,,$$

$$B_z^{\,1} = -i\, \frac{\left\{ B + \dfrac{\alpha\, C}{k\, R} \right\} k\, R\, I_\alpha'(\eta\, R)}{K_\alpha'(k\, R)}\, \frac{\tilde{p}_1}{p}\,.$$

Unter Beachtung, daß sich der Druck bei Bewegung der Oberfläche ebenfalls ändert, folgt dann als Gleichung zwischen k, ω, α als Bedingung der Erfüllbarkeit der Übergangsbedingung zwischen Vakuum und Plasma

$$\frac{2\, R\, \omega^2}{a^2\, \eta}\, \frac{I_\alpha(\eta\, R)}{I_\alpha'(\eta\, R)} = 1 + \frac{\left(D + \dfrac{\alpha\, C}{k\, R}\right)^2 k\, R}{C^2 + B^2}\, \frac{K_\alpha(k\, R)}{K_\alpha'(k\, R)}\, k\, R\,.$$

Das Verhalten für $B^z = 0$, $B^\varphi \neq 0$ ($C = 0$, $D \neq 0$) wurde von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD [2] untersucht und ergibt die bekannte Pinch-Instabilität. In einer neueren Arbeit von TAYLER [4] wurde das Verhalten dieser Gleichung genauer diskutiert. Sie ist für alle Wellenlängen für $\alpha = 0$ und 1 instabil, und für $\alpha > 2$ ergibt sich Instabilität gegenüber kleineren Wellenlängen.

Ist $B^\varphi = 0$, $B^z \neq 0$ ($D = 0$, $C \neq 0$), so kann man leicht sehen, daß diese Anordnung immer stabil ist. Für den allgemeinen Fall sieht man, daß für wachsende Anteile B^φ im Verhältnis zu B^z zunächst die

* I_α sind BESSEL-Funktionen und K_α NEUMANNsche Funktionen.

Lösungen für kleine Wellenlängen, d. h. große k, instabil werden, bis schließlich für $B^z = 0$ das oben diskutierte Verhalten eintritt. LUNDQUIST [3] hat für inkompressibles Plasma gezeigt, daß bei vorhandenem Magnetfeld in z-Richtung ein Hinzufügen eines Magnetfeldes in der φ-Richtung zur Instabilität beiträgt. Er bewies, daß für seine angenommene Verschiebung Instabilität herrscht, wenn für das Feld im Innern des Plasmazylinders gilt

$$\int_0^R (B^\varphi)^2\, r\, dr > 2 \int_0^R (B^z)^2\, r\, dr\,.$$

Er kann nicht zeigen, daß, wenn diese Ungleichung nicht erfüllt ist, Stabilität vorliegt, da er seine Verschiebungen nicht minimalisiert.

Aus dem Obigen geht hervor, daß eine zylindersymmetrische Plasmakonfiguration ohne Magnetfeld im Innern des Plasmas, die also nur durch Oberflächenströme zusammengehalten wird, stets instabil ist, wenn eine azimutale Komponente des Magnetfeldes existiert. Analog wie bei TAYLER [4] sind auch hier die Störungen kleiner Wellenlängen am instabilsten.

Die Bewegung geladener Teilchen in rotations-symmetrischen Magnetfeldern

Von R. LÜST und A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **12 a**, 841—843 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

Die Bewegung geladener Teilchen in rotations-symmetrischen Magnetfeldern wird untersucht. In diesem Fall kann man aus einer Verallgemeinerung des Drehimpulserhaltungssatzes bestimmte Bedingungen ableiten, unter welchen die Teilchen in einem endlichen Volumen für unbegrenzte Zeit festgehalten werden.

The motion of a charged particle in a magnetic field of rotational symmetry allows for a generalization of the law of conservation of angular momentum. From this conditions are derived, under which a particle will always stay within a finite volume.

a) Will man ein Plasma durch Magnetfelder einschließen, so genügt es für viele Fragen, das Plasma makroskopisch durch eine Flüssigkeit zu beschreiben und die daraus folgenden Bedingungen zu untersuchen. Mikroskopisch gesehen, geschieht das Festhalten des Plasmas durch ein Magnetfeld dadurch, daß die Teilchen um die Magnetfeldlinien spiralen. Für die genauere Untersuchung, inwieweit die Teilchen durch ein Magnetfeld zusammengehalten werden, und ob sie aus einem vorgegebenen Volumen entweichen können, muß man die Bahn der einzelnen Teilchen betrachten.

Im folgenden soll die Frage untersucht werden, durch welche zylindersymmetrischen Magnetfelder es möglich ist, Teilchen innerhalb eines geschlossenen Volumens festzuhalten. Von STÖRMER sind die Bahnen von geladenen Teilchen in einem Dipolfeld untersucht worden. Diese Berechnungen wurden später von den Verfassern fortgesetzt und man kann sehen, daß die hier zu untersuchende Frage sich in sehr analoger Weise behandeln läßt.

b) Ein zylindersymmetrisches Magnetfeld $\mathfrak{B}$ läßt sich in ein toroidales (oder azimutales) Feld und in ein meridionales Feld zerlegen. Der meridionale Anteil kann dabei beschrieben werden durch eine skalare Funktion $F(s, z)$, (s = Abstand von der z-Achse als Symmetrieachse, z = Abstand von der Äquatorebene), wobei $2\pi F(\mathfrak{r})$ den gesamten Fluß bedeutet durch die Fläche, deren Begrenzung durch die Rotation des Punktes $\mathfrak{r}$ um die Symmetrieachse entsteht ($\mathfrak{r}$ = Ortsvektor). Auch der toroidale Feldanteil läßt sich durch eine skalare Funktion $T(s, z)$ beschreiben, die analoge Bedeutung wie F für die elektrische Stromdichte hat.

Durch die beiden Funktionen F und T drückt sich das Magnetfeld wie folgt aus, wenn $\mathfrak{e}_z$ der Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse ist,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\mathrm{m} + \mathfrak{B}_\mathrm{t} = \frac{1}{s^2}\left[[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\ \mathrm{grad}\, F\right] + \frac{1}{s^2}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_z]\, T\,. \quad (1)$$

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens mit der Ruhemasse m_0, der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Ladung $Z e$ (e = Elementarladung, Z = Anzahl der Elementarladungen) in einem Magnetfeld ist gegeben durch

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \frac{Z e}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\,. \quad (2)$$